

Tutorium Mathe 2 MT

Potenzreihen & Taylorreihen

1. Unendliche Reihen

Unendliche Reihen kennt vielleicht der ein oder andere eher aus Knobelaufgaben, wie sie ab und zu in Mathematikbüchern zu finden sind. Hier geht es nun darum, wie man diese unendlichen Reihen mathematisch untersuchen kann und welche Aussagen über sie gemacht werden können.

Als Beispiel nehmen wir die Reihe:

$$a_n = 0,5^{n-1}$$

Das n ist in diesem Fall der Index der Reihe. Betrachten wir zunächst einige Werte der Reihe.

$$a_1 = 1, a_2 = 0,5, a_3 = 0,5^2, a_4 = 0,5^3, \dots$$

Aus dieser Darstellung kann man nun Partialsummen bilden, in denen jeweils Summanden Werte der Reihe summiert werden. Das a wird wegen der Bezeichnung Summe nun zu einem s geändert.

$$s_1 = 1$$

$$s_4 = 1 + 0,5 + 0,5^2 + 0,5^3 = 1,875$$

$$s_6 = 1 + 0,5 + 0,5^2 + 0,5^3 + 0,5^4 + 0,5^5 = 1,96875$$

⋮

Diese Summe soll nun zu einer unendlich langen Summe werden. Dazu betrachten wir nun zunächst n Glieder und schreiben den Ausdruck verkürzt mit dem Summenzeichen.

$$s_n = 1 + 0,5 + \dots + 0,5^{n-1} = \sum_{k=1}^n 0,5^{k-1}$$

Um zum Ausdruck zu bringen, dass wir im Folgenden eine unendliche Reihe betrachten, ersetzt man das n nun gegen das Unendlich Zeichen.

$$s_n = \sum_{k=1}^{\infty} 0,5^{k-1}$$

Nun soll es darum gehen, zu bestimmen, ob diese Reihe, wenn wir alle unendlich vielen Glieder betrachten, gegen einen Grenzwert läuft. Existiert dieser Grenzwert, so ist die Reihe konvergent, ansonsten heißt sie divergent.

Nachprüfen kann man die Existenz eines Grenzwertes auf verschiedene Art und Weise. Für das Beispiel hier bietet es sich z.B. an, durch eine Subtraktion, bei der sich möglichst viele Summanden der Reihe auslöschen, anzusetzen.

$$s_n = 1 + 0,5 + 0,5^2 + 0,5^3 + \dots + 0,5^{n-1}$$

$$-0,5 \cdot s_n = 0,5 + 0,5^2 + 0,5^3 + \dots + 0,5^{n-1} + 0,5^n$$

Durch dieses Verfahren fallen bis auf ein paar Ausnahmen, alle Summanden weg. Übrig bleibt eine einfach zu lösende Gleichung, die wieder nach s umgestellt wird.

$$s_n - 0,5 \cdot s_n = 1 - 0,5^n$$

$$s_n = 2 \cdot (1 - 0,5^n)$$

An dieser Stelle muss man darauf achten, dass nicht einfach ausgeklammert werden darf, schließlich gehen Potenzen vor Multiplikation. Um nun zu wissen, was passiert, wenn unendlich Summanden von s summiert werden, lässt man nun n gegen unendlich laufen.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = 2 \cdot (1 - 0,5^n) = 2$$

Der Grenzwert dieser unendlichen Reihe ist also 2, die Reihe konvergiert demnach gegen 2. Um diesen letzten Schritt nachvollziehen zu können, muss man sich nur deutlich machen, was passiert, wenn bei $0,5^n$ das n immer größer wird. Grundsätzlich kann man sagen:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a^n = \begin{cases} 0, & \text{wenn } -1 < a < 1 \text{ und } a \neq 0 \\ 1, & \text{wenn } a = 1 \\ \infty, & \text{wenn } a < -1 \text{ oder } a > 1 \\ n.V., & \text{wenn } a = 0 \text{ oder } a = -1 \end{cases}$$

Anschaulich bedeutet der ermittelte Grenzwert, dass sich, wenn wir die Summe s um immer mehr Summanden erweitern, sich das Ergebnis immer weiter der 2 annähern wird. Erreicht wird dieser Wert aber nur theoretisch, weshalb man hier auch grundsätzlich beim Rechnen etwas um die Ecke denken muss.

Einige Beispiele sollen diese Zusammenhänge verdeutlichen. In diesem Fall sind es drei Beispiele für divergente Folgen, die keinen Grenzwert besitzen, wenn man unendlich viele Summanden aufaddiert.

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} n = 1 + 2 + 3 + 4 + \dots + n \rightarrow \infty$$

$$(2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} \rightarrow \infty$$

$$(3)$$

$$s_n = 1 + 1,001 + 1,0001 + \dots$$

$$s_n = 1 + 0,01^n \rightarrow \infty$$

Ein sehr wichtiges Beispiel für eine unendliche Reihe ist die sogenannte geometrische Reihe. Sie ist nur für bestimmte Werte konvergent.

$$\sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1} = 1 + q^1 + q^2 + \dots + q^n$$

Wenn man sich nun das einführende Beispiel noch einmal ansieht, kann man einen Zusammenhang erkennen und damit auch schon die erste Aussage über diese Reihe machen. Die geometrische Reihe ist demnach für $q = 0,5$ auf jeden Fall konvergent. Im Folgenden wird nun gezeigt, für welche q die Reihe konvergiert und für welche sie divergiert. Dazu setzen wir wie im Einführungsbeispiel an und ersetzen die 0,5 durch das q .

$$\begin{aligned}
 s_n &= 1 + q + q^2 + q^3 + \dots + q^{n-1} \\
 -q \cdot s_n &= -q - q^2 - q^3 - \dots - q^{n-1} - q^n \\
 s_n - q \cdot s_n &= 1 + q^n \\
 s_n(1 - q) &= 1 + q^n \\
 s_n &= \frac{1 + q^n}{1 - q} \quad (q \neq 1) \\
 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + q^n}{1 - q} &= \frac{1}{1 - q} \quad \left(\text{weil } \lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0 \right)
 \end{aligned}$$

Der Nenner dieses Ausdrucks muss auf jeden Fall existieren, somit darf q auf keinen Fall 1 sein. Nun kommt hinzu, dass das q^n auch nicht für alle Werte konvergiert, was oben schon bereits festgestellt wurde.

Aus diesen beiden Informationen kann man nun zusammenfassend sagen, dass die geometrische Reihe für $|q| < 1$ konvergiert, ansonsten divergiert sie.

Wenn man diese Betrachtung an mehreren Reihen durchführt, leitet sie über zum sogenannten Quotientenkriterium, welches als Betrachtungshilfsmittel für unendliche Reihen genutzt werden kann. Hierzu müssen lediglich zwei aufeinanderfolgende Werte der Reihe untersucht werden.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = q < 1$$

Wichtig!! Dieses Kriterium ist hinreichend, es gibt also auch Reihen, die es nicht erfüllen, aber trotzdem konvergent sind. Im Fall $q = 1$ muss die Reihe mit anderen Mitteln untersucht werden, das Quotientenkriterium ist in diesem Fall unbrauchbar.

Kommen wir nun von allgemeinen unendlichen Reihen zu Potenzreihen, die eine spezielle Gruppe dieser Reihen repräsentieren.

2. Potenzreihen

Ein Beispiel für eine Potenzreihe ist:

$$P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + \dots + a_n \cdot x^n + \dots$$

Der Unterschied zu den anderen Reihen ist der, dass es sich bei den Summanden um Funktionen handelt, die von einer unabhängigen Variable x abhängen. Die Faktoren a_0, a_1, a_2, \dots sind die zugehörigen Koeffizienten der Summanden.

Die oben gezeigte Form ist eine spezielle Form der Potenzreihen, eine Potenzreihe mit der Entwicklungsmitte $x_0 = 0$. Die allgemeine Form der Potenzreihen sieht folgendermaßen aus:

$$P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (x - x_0)^n = a_0 + a_1 \cdot (x - x_0) + a_2 \cdot (x - x_0)^2 + \dots + a_n \cdot (x - x_0)^n + \dots$$

Potenzreihen können genau wie alle anderen unendlichen Reihen auf Konvergenz untersucht werden. In diesem Fall spielt die Variable x eine wichtige Rolle. Für verschiedene Werte von x kann die Reihe entweder konvergieren oder divergieren, daher nennt man die Menge aller x , für die die Reihe konvergiert, den Konvergenzbereich der Potenzreihe.

Für den Konvergenzbereich ist folgendes wichtig:

- jede Potenzreihe konvergiert für $x=0$
- der Konvergenzbereich einer Potenzreihe ist immer vom Nullpunkt ausgehend auf beiden Seiten gleich groß (Bsp. von $-r$ bis r) \rightarrow Konvergenz für $|x| < r$
- Außerhalb des Bereichs divergiert die Reihe \rightarrow Divergenz für $|x| > r$
- für die Randpunkte $x = \pm r$ müssen weitere Untersuchungen durchgeführt werden

Berechnen lässt sich der sog. Konvergenzradius der Reihe mit der Formel

$$r = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$$

Man kann Potenzreihen innerhalb des Konvergenzradius als Funktion von x auffassen. Daraus ergeben sich einige allgemeine Eigenschaften:

- innerhalb des Konvergenzbereichs konvergiert die Reihe absolut
- die Reihe darf gliedweise differenziert und integriert werden, wodurch der Konvergenzradius nicht geändert wird
- Haben zwei Potenzreihen einen gemeinsamen Konvergenzbereich, so dürfen sie miteinander gliedweise addiert, subtrahiert und multipliziert werden. Die neu entstehenden Reihen konvergieren dann mindestens im gemeinsamen Konvergenzbereich der Ausgangsreihen

3. Taylorreihen

Taylorreihen dienen dazu, unbekannte Funktionen mit Hilfe von Potenzreihen zu entwickeln, man spricht daher auch in diesem Zusammenhang von einer „Potenzreihenentwicklung“. Dies dient dazu, sich z.B. Näherungswerte für Funktionen zu berechnen. Außerdem findet diese Rechnung in der Integralrechnung Anwendung.

Für die Potenzreihenentwicklung gibt es zwei wichtige Bedingungen:

- die betrachtete Funktion muss um eine Entwicklungsmitte x_0 herum beliebig oft differenzierbar sein
- nicht jede Funktion lässt sich in eine Potenzreihe entwickeln (\rightarrow kein hinreichendes Kriterium vorhanden)

Mac-Laurinsche Reihe

Die Mac-Laurinsche Reihe stellt eine Verallgemeinerung der Taylorreihe dar, indem sie immer mit der Entwicklungsmitte $x = x_0$ gebildet wird.

Die Ableitung der Reihe hat zur Folge, dass pro Ableitung ein Koeffizient ermittelt werden kann. Da $x = 0$ gilt, fallen alle anderen Faktoren weg. Die folgende Entwicklung zeigt dies:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot x^k = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + a_3 \cdot x^3 + a_4 \cdot x^4 + \dots + a_n \cdot x^n + \dots$$

$$f(0) = a_0$$

$$f'(x) = a_1 + 2 \cdot a_2 \cdot x + 3 \cdot a_3 \cdot x^2 + 4 \cdot a_4 \cdot x^3 + \dots$$

$$f'(0) = a_1$$

$$f''(x) = 2 \cdot a_2 + 6 \cdot a_3 \cdot x + 12 \cdot a_4 \cdot x^2 + \dots$$

$$f''(0) = 2 \cdot a_2 \Rightarrow a_2 = \frac{f''(0)}{2}$$

$$f'''(x) = 6 \cdot a_3 + \dots$$

$$f'''(0) = 6 \cdot a_3 \Rightarrow a_3 = \frac{f'''(0)}{6}$$

Um dies zu verallgemeinern, muss man den Faktor vor den Koeffizienten betrachten, hier 1, 2, 6... Dieser Zusammenhang entspricht der Fakultät. So kann auch der Nenner in der allgemeinen Form als $n!$ geschrieben werden.

$$f^{(n)}(0) = n! \cdot a_n \Rightarrow a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$$

Daraus ergibt sich nun die Entwicklung der Mac-Laurinsche Reihe einer Funktion mit:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} x^1 + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

An dieser Stelle sei noch gesagt, dass die Symmetrieeigenschaften der Reihe sich in der entwickelten Reihe wiederfinden, d.h. in der Potenzreihe einer geraden Funktion gibt es nur gerade Potenzen.

Beispiel:

Anwendung der Formel auf die Funktion $x^3 - 5x$. Dieses Beispiel zeigt, warum bei ungeraden Funktionen gerade Exponenten nicht auftreten. Natürlich wäre diese Berechnung eigentlich überflüssig, zur Anschaulichkeit ist sie jedoch gut geeignet.

$$f(x) = x^3 - 5x$$

$$f(0) = 0$$

$$f'(x) = 3x^2 - 5$$

$$f'(0) = -5$$

$$f''(x) = 6x$$

$$f''(0) = 0$$

$$f'''(x) = 6$$

$$f'''(0) = 6$$

$$\begin{aligned} f(x) &= f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x^1 + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 \\ &= 0 + \frac{-5}{1}x + 0 + \frac{6}{6}x^3 = x^3 - 5x \end{aligned}$$

Taylorreihe

Die Taylorreihe stellt die Verallgemeinerung der Mac-Laurinschen Reihe dar, indem sie für alle Entwicklungsmitten die Entwicklung definiert.

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)^1 + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

Die Mac-Laurinsche Reihe ist also nur ein Spezialfall der Taylorreihe, bei dem $x_0 = 0$ gilt.

Beispiel:

Potenzreihenentwicklung der Sinusfunktion (mit 4 Gliedern, Entwicklungsmitte $x_0 = \pi$)

$$f(x) = \sin(x) \rightarrow f(\pi) = 0$$

$$f'(x) = \cos(x) \rightarrow f'(\pi) = -1$$

$$f''(x) = -\sin(x) \rightarrow f''(\pi) = 0$$

$$f'''(x) = -\cos(x) \rightarrow f'''(\pi) = 1$$

⋮

$$f(x) = -\frac{1}{1!}(x-\pi)^1 + \frac{1}{3!}(x-\pi)^3 \dots$$

Da der Ableitungskreis von Sinus und Kosinus immer wieder durchlaufen wird, kann man an dieser Stelle auch weitere Glieder ohne Rechnung ermitteln.

Regel von de L'Hospital

Diese Regel ermöglicht es, zunächst nicht errechenbare Grenzwerte zu bestimmen. Ein erstes Beispiel dafür ist z.B. der Grenzwert

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{e^x} \rightarrow \frac{\infty}{\infty}$$

Grundsätzlich sind zwei Arten von Grenzwerten mit unbestimmten Ausdrücken für diese

Regel zulässig, nämlich neben dem schon gezeigten $\frac{\infty}{\infty}$ auch der Bruch $\frac{0}{0}$.

Die Herleitung der Formel ist an dieser Stelle nicht so wichtig, sie passiert über Potenzreihen, mit denen man $\frac{0}{0}$ annähert.

Man kommt zu dem Ergebnis, dass man einen Grenzwert einer Division von zwei Funktionen, der zu einem unbestimmten Ausdruck führt, (in den meisten Fällen) durch Division der entsprechenden Ableitungen ermitteln kann. Auch mehrmaliges Ableiten der Funktionen ist erlaubt.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Beispiel:

Grenzwert der SI-Funktion für $x \rightarrow 0$

$$f(x) = \frac{\sin(x)}{x} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \frac{0}{0}$$

Nach de L'Hospital:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x)}{1} = \frac{1}{1} = 1$$