Weiterführung der Faltung

$$s(t) = s(t) * \delta(t)$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} s(\tau) \cdot \delta(t-\tau)\, d\tau$$

LTI-Systeme (Wdh.):

$$s_1(t) \rightarrow \boxed{h(t)} \rightarrow g_1(t)$$
$$s_2(t) \rightarrow \boxed{h(t)} \rightarrow g_2(t)$$
$$SUPERPOSITION:$$
$$s_1(t) + s_2(t) \rightarrow \boxed{h(t)} \rightarrow g_1(t) + g_2(t)$$
$$VERSCHIEBUNG:$$
$$s(t-T_0) \rightarrow \boxed{h(t)} \rightarrow g(t-T_0)$$
$$EIGENFUNKTION:\ s_E(t)$$
$$s_E(t) = e^{j\omega t}$$
$$e^{j\omega t} \rightarrow \boxed{h(t)} \rightarrow \underline{H} \cdot e^{j\omega t} \quad (Veränderung\ nur\ in\ Amplitude\ und\ Phase)$$
$$komplexer\ Faktor\ \underline{H} = H \cdot e^{j\varphi} \quad (Amplitude \cdot Phase)$$
$$e^{j\omega t} * h(t) \Rightarrow g(t) = s(t) * h(t) \Rightarrow \underline{H} \cdot e^{j\omega t} = e^{j\omega t} * h(t)$$
$$h(t) * e^{j\omega t} = \underline{H} \cdot e^{j\omega t}$$

Die Faltung von h(t) mit $e^{j\omega t}$ ist gleich dem Produkt des komplexen Faktors H mit $e^{j\omega t}$.

$$\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) \cdot e^{j\omega(t-\tau)}\, d\tau = \underline{H} \cdot e^{j\omega t}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) \cdot e^{j\omega t} \cdot e^{-j\omega\tau}\, d\tau = \underline{H} \cdot e^{j\omega t}$$

$$e^{j\omega t} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) \cdot e^{-j\omega\tau}\, d\tau = \underline{H} \cdot e^{j\omega t}$$

$$\underline{H} = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) \cdot e^{-j\omega t}\, dt \quad (\tau\ wurde\ durch\ t\ ersetzt)$$

$$\underline{H} = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) \cdot e^{-j2\pi f t}\, dt$$

- ➔ Da die Berechnung frequenzunabhängig ist, kann man H(f) angeben, um so für alle Frequenzen Berechnungen machen zu können.

$$H(f)=\int_{-\infty}^{\infty} h(t)\cdot e^{-j2\pi ft}dt$$

$$H(f)=\mathbf{F}\{h(t)\} \qquad \mathbf{F}=Fouriertransformation$$

Die Fouriertransformierte einer System – Impulsantwort h(t) ist die Übertragungsfunktion H(f).

Messanalyse der Übertragungsfunktion

Betrachtung von Systemen in Zeit und Frequenzbereich

$$s(t)\rightarrow\boxed{h(t)}\rightarrow g(t) \qquad \circ\!-\!\bullet \qquad S(f)\rightarrow\boxed{H(f)}\rightarrow G(f)$$

$$Signal\;\; Impulsantwort \qquad\qquad System\;\; Übertragungsfunktion$$

$$g(t)=s(t)*h(t) \qquad \circ\!-\!\bullet \qquad G(f)=S(f)\cdot H(f)$$

$$a(t)*b(t) \qquad \circ\!-\!\bullet \qquad A(f)\cdot S(f)$$

$$\mathbf{F}\{s(t)\}=\int_{-\infty}^{\infty} s(t)\cdot e^{j2\pi ft}dt=S(f)$$

$$\mathbf{F}^{-1}\{S(f)\}=\int_{-\infty}^{\infty} S(f)\cdot e^{j2\pi ft}dt=s(t)$$

Die Fouriertransformation macht aus einer Faltung eine Multiplikation und aus der Multiplikation

mit der Inverse eine Faltung.

Untersuchung des idealen Tiefpasses

Rechteckimpuls:

$$rect(t)=\begin{cases} 0: t<-\frac{T_0}{2} \\ 1: -\frac{T_0}{2}\le t\le\frac{T_0}{2} \\ 0: t>\frac{T_0}{2} \end{cases}$$

$$\mathbf{F}\left\{rect(t)\right\} = \int_{-\infty}^{\infty} rect(t)\cdot e^{-j2\pi ft}dt = \int_{-\infty}^{-\frac{T_0}{2}} 0\cdot e^{-j\omega t}dt + \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} 1\cdot e^{-j\omega t}dt + \int_{\frac{T_0}{2}}^{\infty} 0\cdot e^{-j\omega t}dt$$

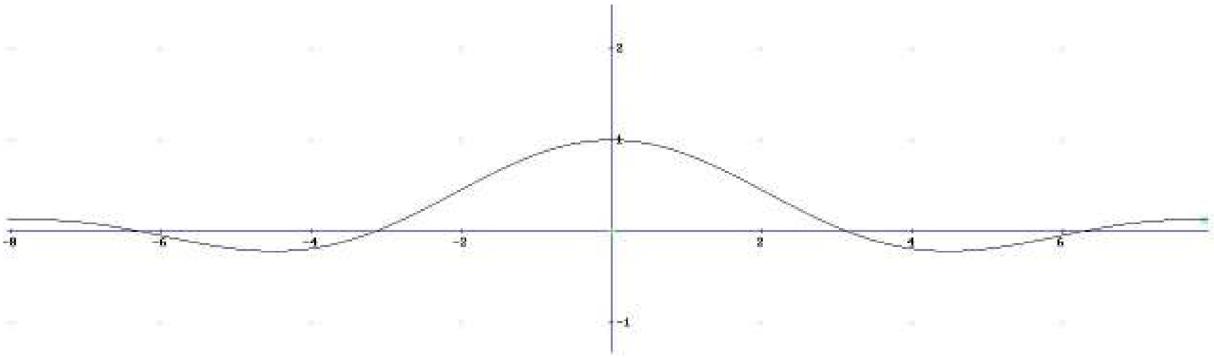
$$= \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} 1\cdot e^{-j2\pi ft}dt = -\frac{1}{j2\pi f}\cdot e^{-j2\pi ft}\Big|_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} = -\frac{1}{j2\pi f}\cdot\left(e^{j\pi T_0} - e^{-j\pi fT_0}\right)$$

$$= -\frac{e^{-j\pi fT_0} - e^{j\pi fT_0}}{j2\pi f} = \frac{e^{j\pi fT_0} - e^{-j\pi fT_0}}{j2\pi f} = \frac{1}{\pi f}\cdot\frac{e^{jx} - e^{-jx}}{2j}$$

$$= \frac{1}{\pi f}\cdot\sin(x) = \frac{1}{\pi f}\cdot\sin(\pi fT_0)$$

$$= \frac{\sin(\pi fT_0)}{\pi f} = T_0\cdot\frac{\sin(\pi fT_0)}{\pi f} = T_0\cdot si(\pi fT_0) \qquad si(x) = \frac{\sin(x)}{x}$$

Die SI-Funktion heißt auch Spaltfunktion und ist eine der wichtigsten Funktionen in der Nachrichtentechnik.



- ➔ Hauptpuls der SI Funktion ist doppelt so breit wie alle anderen
- ➔ die Wellenlänge ändert sich nicht

Impulsantwort eines ideales Tiefpasses:

$$id.TP(f): idealer\ TP$$

$$id.TP(f) = \begin{cases} 0: t < -f_g \\ 1: -f_g \le t \le f_g \\ 1: t > f_g \end{cases}$$

$$h_{TP}(t) = \mathbf{F}^{-1}\left\{TP(f)\right\}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} TP(f)\cdot e^{j2\pi ft}df = \int_{-f_g}^{f_g} e^{j2\pi ft}df = \frac{e^{j2\pi f_g t} - e^{-j2\pi f_g t}}{j2\pi t}$$

$$= \frac{1}{\pi t}\cdot\frac{e^{jx} - e^{-jx}}{2j} = \frac{1}{\pi t}\cdot\sin\left(2\pi t f_g\right)$$

$$= 2\cdot f_g\cdot si\left(2\pi\cdot f_g\cdot t\right)$$

Makel des idealen Tiefpasses, wenn man ihn realisieren wollte:
- Impulsantwort beginnt bei $t < 0$ → nicht kausales System
- negative Impulsantwort ist unendlich lang → System würde erst nach unendlich langer Zeit antworten → unbeschränkte Impulsantwort

<u>Signale in Zeit und Frequenzbereich</u>

1. streng periodische Signale
   - Perioden wiederholen sich exakt!
   - diskretes Linienspektrum → streng harmonisch

2. quasi periodische Signale
   - Perioden ähneln sich, sind aber nicht identisch

3. stochastische Signale