Ansatz über Federpendel:

Hooke: $F = s \cdot \xi$
Newton: $F = m \cdot a$

1. frei und ungedämpft

$$\Rightarrow DGL: m \cdot a = s \cdot \xi \Rightarrow m \cdot a - s \cdot \xi = 0 \Rightarrow \ddot{\xi} \cdot m - s \cdot \xi = 0$$

$$\Rightarrow spezielle\ Lösung: \xi(t) = \xi_0 \cdot \cos(\omega_0 t) \ \ mit \ \ \omega_0 = \sqrt{\frac{s}{m}}$$

$$\omega_0 = 2\pi \cdot f_0 \, (\leftarrow Definition)$$

$$\boxed{f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \cdot \sqrt{\frac{s}{m}}}$$

2. frei und gedämpft

$$m \cdot \ddot{\xi} - r \cdot \dot{\xi} - s \cdot \xi = 0$$

3. erzwungen und gedämpft

$$m \cdot \ddot{\xi} - r \cdot \dot{\xi} - s \cdot \xi = F(t) \cdot \cos(\omega t)$$

spezielle Lösung:

$$\xi(t) = \xi_0 \cdot \cos(\omega t - \varphi)$$

$$\dot{\xi}(t) = -\xi_0 \cdot \omega \cdot \sin(\omega t - \varphi)$$

$$\ddot{\xi}(t) = -\xi_0 \cdot \omega^2 \cdot \cos(\omega t - \varphi)$$

$$\Rightarrow -m \cdot \xi_0 \cdot \omega^2 \cdot \cos(\omega t - \varphi) - r \cdot \xi_0 \cdot \omega \cdot \sin(\omega t - \varphi) + s \cdot \xi_0 \cdot \cos(\omega t - \varphi) = F_0 \cdot \cos(\omega t)$$

für tiefe Frequenzen: $\omega \ll \omega_0$

$$F_0 = s \cdot \xi_0, \ \varphi = 0 \Rightarrow \xi = \frac{F_0}{s}$$

- Auslenkung wird durch die äußere Kraft gesteuert
- lineares System liegt vor!!

für hohe Frequenzen: $\omega \gg \omega_0$

$$F_0 = m \cdot \omega^2 \cdot \xi_0 \rightarrow \xi = \frac{F_0}{m \cdot \omega^2} \rightarrow Auslenkung\ \ proportional\ \ zu\ \frac{1}{f^2}$$

$$\varphi = \pi \ \ bzw. 180°$$

$$\rightarrow wegen\ -\cos(\omega t - \varphi) = \cos(\omega t) \Rightarrow \cos(x + \pi) = \cos(x)$$

- es handelt sich um einen Tiefpass zweiter Ordnung
- die Impulsantwort ist die gedämpfte Schwingung
- System wird angeregt, Feder ziehen = Diracstoß

bei ungedämpfter Schwingung ist Sinus/Cosinus die Impulsantwort.
Ein praktisches Beispiel ist eine Stimmgabel, die als einfacher Sinusgenerator interpretiert werden kann.

Zusammenfassung Lineare Systeme (Stichpunkte):

- es gibt eine Vielzahl von linearen Systemen
- Impulsantwort, Fouriertransformation und Faltung sind die Rechenwerkzeuge
- einfache Systeme haben eine einfache Lösung
- Untersuchungen im Zeit und Frequenzbereich (per Fouriertransformation)
- Analyse des Signals → Fouriertransformation → Spektrum des Signals
  (für konstante Funktionen → konstantes Spektrum, für zeitveränderliche Funktionen → kontinuierliches Spektrum)
- 2 Analysemethoden:
    - Impulsantwort → Fouriertransformation
    - Eigenfunktion → sin/cos

Signale in Zeit und Frequenzbereich

| Zeitbereich | Frequenzbereich |
|---|---|
| streng periodisch | - diskretes, harmonisches Linienspektrum (Teiltöne, partials) *ganzzahlige Frequenzverhältnisse<br>- im Allg.: $f_1, 2 \cdot f_1, 3 \cdot f_1, \ldots$ |
| quasi periodische Signale | → Sprache, Musik |
| stochastische Signale | - frequenz-kontinuierliches Spektrum<br>- im Allg.: $0Hz \leq f \leq \infty$ |

Psychophysik: Weber- Fechner'sches Gesetz

| physikalische Größe | Empfindung (psychologische Größe) |
|---|---|
| Pegel / Amplitude | Lautheit (Lautstärke) |
| Frequenz | Tonhöhe |
| Spektrum | Klangfarbe |
| Lichtstärke | Helligkeit |
| Spektrum / Frequenz | Farbe |

➔ Empfindungen sind verhältnisskaliert!!

Intervall:

➔ frequenzverhältnis

➔ Terz: $f_2 = 2^{\frac{1}{3}} \cdot f_1$

➔ Oktave: $f_2 = 2 \cdot f_1$

➔ Dekade: $f_2 = 10 \cdot f_1$

➔ z.B. Oktavbandfilter lassen sich hier heraus ableiten → Frequenzabstand ist konstant (Bsp. 1000Hz – 2000Hz)

- es gibt zwei Darstellungsmöglichkeiten:
    - linear: technisch angemessen, wahrnehmungsmäßig nicht angemessen
    - logarithmisch: sehr nah an der an der Wahrnehmung, keine 0 Hz auf der Skala

Pegelrechnung:

- logarithmieren → pegeln

Reiz x → log x → Pegel $L_x\left[Bel\right]$

z.B. Schalleistung W

$$\log\left(W\right)=L_W\left[Bel\right]$$

$$10\cdot\log\left(W\right)=L_W\left[dB\right]$$

Bezugsgrößen

Energiegrößen:

- Leistung: $W_0=10^{-12}W$
- Intensität: $J_0=10^{-12}\dfrac{W}{m^2}$

Amplituden:

- Druck: $p_0=2\cdot10^{-5}Pa\left[dB\ SPL\right]$

elektrische Größen:

- Spannung: $U_0=\begin{cases}0{,}775V\ \left(deutsch\right)\left[dBu\right]\\ 1V\ \left(amerik./\ japan.\right)\left[dBV\right]\end{cases}$
- Leistung: $W_{el0}=1mW\left[dBm\right]$

für Energiegrößen:

$$L_x=10\cdot\lg\left(\frac{x}{x_0}\right)$$

für Amplitudengrößen:

$$L_x=10\cdot\lg\left(\frac{x}{x_0}\right)^2=20\cdot\lg\left(\frac{x}{x_0}\right)$$

Beispiele für den quadratischen Zusammenhang:

elektrische Leistung $\left.\begin{array}{l}W=U\cdot I\\ I=\dfrac{U}{R}\end{array}\right\}W=\dfrac{U^2}{R}$

akustische Intensität $\left.\begin{array}{l}I=\tilde{p}\cdot\tilde{v}\\ \tilde{v}=\dfrac{\tilde{p}}{Z_0}\end{array}\right\}I=\dfrac{\tilde{p}^2}{Z_0}$